Teorie nutná ke zvládnutí cvičení 3

II.2. Diskrétní a spojité náhodné veličiny

Definice (Diskrétní náhodná veličina)**.** Náhodná veličina je **diskrétní**, pokud nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot (např. $x_1, x_2, ... \in \mathbb{R}$).

Definice (Spojitá náhodná veličina)**.** Náhodná veličina je **spojitá**, pokud nabývá nespočetně mnoha hodnot (např. interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$).

Poznámka (Rozdělení)

(a) Rozdělení diskrétní náhodné veličiny X je jednoznačně určeno pravděpodobnostmi

$$p_k := \mathbb{P}(X = x_k), k \in \mathbb{N}.$$

Vždy platí

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1.$$

(b) Rozdělení spojité náhodné veličiny X je jednoznačně určeno **hustotou** $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, pro níž

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Tedy např. pro $B = [a, b], a < b$, je $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x$, pro $B = \{a\}, a \in \mathbb{R}$, je $\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Vždy platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Poznámka (Distribuční funkce)

(a) Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny nabývající hodnot $x_k, k \in \mathbb{N}$, je skokovitá, po částech konstantní se skoky v x_k o velikosti $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

(b) Distribuční funkce spojité náhodné veličiny je spojitá a platí

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t, \quad f_X(x) = F_X'(x), \text{ pokud derivace v tomto bodě existuje.}$$

Pro libovolné $a < b$ pak

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{P}(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Opakování (Základní vzorce pro integrály a derivace)

Tvar základních primitivních funkcí $F \overset{c}{=} \int f(x)\,\mathrm{d}x$:

- $\int x^a\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}, \quad a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \ln|x|, \quad x \neq 0$
- $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \mathrm{e}^x$
- $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\cos(x)$
- $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \sin(x)$

Základní vzorce pro derivace:

- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $(x^a)' = ax^{a-1} \quad x > 0, a \in \mathbb{R}$
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Určitý integrál pak počítáme jako $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$.
Linearita neurčitého integrálu: $\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} aF + bG$
Věta o substituci: $\int f(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} F(\Phi(t))$
Derivace složené funkce: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$